Politecnico di Milano. Scuola di Ingegneria Industriale.

Corso di Analisi e Geometria 1

(Docente: Federico Lastaria)

16 Ottobre 2019

Indice

1 Esercizi sui limiti e parti principali

1.1 Esercizi

Esercizio 1.1. *Calcolare:*

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

R

Esercizio 1.2. *Calcolare:*

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x(x+1)} - x$$

R

Esercizio 1.3. *Dimostrare che, fissato un qualunque $a \in \mathbb{R}$,*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

R

Esercizio 1.4. *Trovare il*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n}$$

R

Esercizio 1.5. *L'equazione di secondo grado*

$$ax^2 + 2x - 1 = 0$$

$a \neq 0$, $a > -1$, ha le due radici reali

$$r_+(a) = \frac{-1+\sqrt{1+a}}{a}, \qquad r_-(a) = \frac{-1-\sqrt{1+a}}{a}$$

Cosa succede a queste due radici quando a tende a zero? Interpretare geometricamente.

R

Esercizio 1.6. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x}$$

dove a è un fissato numero reale positivo.

R

Esercizio 1.7. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$$

dove m, n sono numeri interi positivi fissati.

R

Esercizio 1.8. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to -1} \frac{1 + \sqrt[5]{x}}{1 + \sqrt[7]{x}}$$

R

Esercizio 1.9. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$$

R

Esercizio 1.10. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

R

Esercizio 1.11. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to +\infty} \sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}$$

R

Esercizio 1.12. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$$

R

Esercizio 1.13. *Calcolare la parte principale dell'infinitesimo*

$$f(x) = \sin x - x\cos\frac{x}{\sqrt{3}}, \qquad x \to 0$$

e il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos\frac{x}{\sqrt{3}}}{x^4}$$

$\boxed{R}$

Esercizio 1.14. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to 1} (2-x)^{\tan \frac{\pi}{2}x}$$

$\boxed{R}$

Esercizio 1.15. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to a} \left(2-\frac{x}{a}\right)^{\tan \frac{\pi x}{2a}}$$

dove a è un numero fissato non nullo.

$\boxed{R}$

Esercizio 1.16. *Calcolare la parte principale dell'infinitesimo*

$$f(x) = \sqrt{\cos x} - 1, \qquad x \to 0$$

e il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{x^2}$$

$\boxed{R}$

1.2 Suggerimenti, Soluzioni, Risposte

Soluzione 1.1

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

Risposta: 0

Soluzione 1.2 Per $x \to +\infty$:

$$\sqrt{x(x+1)}-x=x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\right)=x\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)+o\left(\frac{1}{x}\right)-1\right)$$

Risposta: $\frac{1}{2}$

Soluzione 1.3 Denotiamo $[a]$ la parte intera di a, ossia il più grande numero intero che non supera il numero a. ($[a] \leq a < [a]+1$).

$$\begin{aligned}\frac{a^n}{n!}&=\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{[a]}\cdot\frac{a}{[a]+1}\cdots\frac{a}{n}\\&=C\cdot\frac{a}{[a]+1}\cdots\frac{a}{n} \qquad \left(C=\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{[a]}\right)\\&\leq C\cdot\frac{a}{n}\end{aligned}$$

Il risultato segue dal Teorema del Confronto.

Soluzione 1.4 Per ogni intero $n > 1$, si ha:

$$0<\frac{n!}{n^n}<\frac{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n}{n\cdot n\cdot\cdots\cdot n}<\frac{1}{n}$$

Quindi la successione $\frac{n!}{n^n}$ converge a 0.

Soluzione 1.5 Il limite di $r_-(a)$, per $a \to 0$, non esiste. Esistono, però, i limiti da sinistra e da destra:

$$\lim_{a\to 0^-}\frac{-1-\sqrt{1+a}}{a}=+\infty, \qquad \lim_{a\to 0^+}\frac{-1-\sqrt{1+a}}{a}=-\infty$$

Quanto a $r_+(a)$, si ha:

$$\begin{aligned} r_+(a) &= \frac{-1+\sqrt{1+a}}{a} \\ &= \frac{-1+\sqrt{1+a}}{a}\cdot\frac{(-1-\sqrt{1+a})}{(-1-\sqrt{1+a})} \\ &= \frac{-1}{-1-\sqrt{1+a}} \end{aligned}$$

Quindi, $r_+(a)$ ha per limite $1/2$, per $a \to 0$.

Risposta: $\lim_{a\to 0^\pm} r_-(a) = \mp\infty; \quad \lim_{a\to 0} r_+(a) = \dfrac{1}{2}$.

Soluzione 1.6 Si può usare lo sviluppo di Taylor in $x_0 = 0$ di $(1+x)^a$:

$$(1+x)^a = 1 + ax + \varphi(x)$$

dove $\varphi(x)$ è $o(x)$ per $x \to 0$.

Risposta: a.

Soluzione 1.7 Si può usare il teorema di de L'Hospital. Oppure, si può notare che, per $x \neq 1$,

$$\frac{x^m-1}{x^n-1} = \frac{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+x^{m-3}+\cdots+x+1)}{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\cdots+x+1)} = \frac{(x^{m-1}+x^{m-2}+x^{m-3}+\cdots+x+1)}{(x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\cdots+x+1)}$$

Per $x \to 1$, il numeratore dell'ultima frazione tende a m, il denominatore a n.

Risposta: $\dfrac{m}{n}$.

Soluzione 1.8 Si può usare l'Hospital. Il rapporto tra le derivate del numeratore e del denominatore è

$$\frac{\frac{1}{5}x^{-4/5}}{\frac{1}{7}x^{-6/7}} = \frac{7}{5}x^{2/35} = \frac{7}{5}\sqrt[35]{x^2}$$

Per $x \to -1$, il rapporto delle derivate tende a $\dfrac{7}{5}$.

Oppure si può operare la sostituzione $x = t-1$, e studiare il limite

$$\lim_{t\to 0}\frac{1+\sqrt[5]{t-1}}{1+\sqrt[7]{t-1}} = \lim_{t\to 0}\frac{1-\sqrt[5]{1-t}}{1-\sqrt[7]{1-t}}$$

Per $t \to 0$, si ha $\sqrt[5]{1-t} = 1 - \dfrac{1}{5}t + o(t^2)$, e $\sqrt[7]{1-t} = 1 - \dfrac{1}{7}t + o(t^2)$.

Risposta: $\dfrac{7}{5}$.

Soluzione 1.9 Per $x \to 0$,

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3), \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

Dunque, per $x \to 0$:

$$\frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3} = \frac{\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)}{x^3}$$

Risposta: $\dfrac{1}{2}$.

Soluzione 1.10 Per $x \to 0$,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

Dunque, per $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)}{x^3}$$

Risposta: $\dfrac{1}{6}$.

Soluzione 1.11 *Prima soluzione.* Poniamo $f(x) = \sin\sqrt{x}$, $x > 0$. Per il Teorema di Lagrange, esiste un punto c, soddisfacente $x < c < x+1$, per il quale vale:

$$\left|\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}\right| = |f(x+1) - f(x)| = \left|f'(c)\cdot((x+1)-x)\right| = \left|\frac{1}{2\sqrt{c}}(\cos\sqrt{c})\cdot 1\right| \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Per $x \to +\infty$, $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \to 0$. Dunque $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}\right) = 0$.

Seconda soluzione. Si può utilizzare la formula (di 'prostaferesi')

$$\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

Allora

$$\begin{aligned}\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x} &= 2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2} \\ &= 2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\end{aligned}$$

Per $x \to +\infty$, il fattore $\cos\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}$ è limitato, mente il fattore $\sin\dfrac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}$ tende a zero. Quindi, il limite di $\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}$, per $x \to +\infty$, è zero.

Osservazione. L'argomentazione:

"Poiché $\sqrt{x+1} \sim \sqrt{x}$ (per $x \to +\infty$), si ha:

$\lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}) = \lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x} - \sin\sqrt{x}) = 0$"

è sbagliata.

Risposta: 0.

Soluzione 1.12

$$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = e^{x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)} = e^{x\ln\left(1+\frac{2}{x-1}\right)}$$

Per $x \to +\infty$, $x\ln\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right) \sim x\dfrac{2}{x-1} \sim 2$. Dunque, per la continuità dell'esponenziale,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)} = e^{\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{2}{x-1}\right)} = e^2$$

Risposta: e^2.

Soluzione 1.13 Per $x \to 0$:

$$\sin x - x\cos\frac{x}{\sqrt{3}} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) - x\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{9(4!)}) + o(x^5)\right)$$
$$= \frac{x^5}{5!} - \frac{x^5}{9(4!)} + o(x^5) = \frac{1}{270}x^5 + o(x^5)$$

Risposte: $\dfrac{1}{270}x^5$; 0.

Soluzione 1.14 Posto $1-x=t$, si deve calcolare

$$\lim_{t\to0}(1+t)^{\tan\left[\frac{\pi}{2}(1-t)\right]} \tag{1.1}$$

Si scriva

$$(1+t)^{\tan\left[\frac{\pi}{2}(1-t)\right]} = e^{\tan\left[\frac{\pi}{2}(1-t)\right]\ln(1+t)}$$

Per $t \to 0$, $\tan\left[\dfrac{\pi}{2}(1-t)\right] = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}t\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}t\right)} = \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)} \sim \dfrac{2}{\pi t}$

Risposta: $e^{\frac{2}{\pi}}$.

Soluzione 1.15 Si ponga $x/a = t$, e si veda l'esercizio 1.14.

Risposta: $e^{\frac{2}{\pi}}$.

Soluzione 1.16 Per $x \to 0$,

$$\begin{aligned}
\sqrt{\cos x} - 1 &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^{\frac{1}{2}} - 1 \\
&= 1 - \frac{1}{4}x^2 + o(x^2) - 1 = -\frac{1}{4}x^2 + o(x^2)
\end{aligned}$$

In modo più rapido (ma meno generale), si può scrivere

$$\begin{aligned}
\sqrt{\cos x} - 1 &= \frac{(\sqrt{\cos x} - 1)(\sqrt{\cos x} + 1)}{\sqrt{\cos x} + 1} \\
&= \frac{\cos x - 1}{\sqrt{\cos x} + 1} \sim \frac{-\frac{x^2}{2}}{2} = -\frac{1}{4}x^2
\end{aligned}$$

Dunque, la parte principale di $\sqrt{\cos x} - 1$ è $-\dfrac{1}{4}x^2$.

Risposte: $-\dfrac{1}{4}x^2$; $-\dfrac{1}{4}$.