

Politecnico di Milano. Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi e Geometria 1. Docente: Federico Lastaria

Argomenti trattati a lezione. (Anno accademico 2019-2020)

Diario

Prima settimana (16-20 Settembre 2019)

1. Incommensurabilità di lato e diagonale del quadrato: irrazionalità di $\sqrt{2}$. (Con dimostrazione).
2. Il campo ordinato completo \mathbb{R} dei numeri reali: presentazione assiomatica. Assioma di completezza nella forma di Proprietà di Separazione (Prima forma della completezza).
3. Definizione di massimo, minimo, estremo superiore, estremo inferiore.
4. Esistenza dell'estremo superiore. (Altra forma della completezza).(Con dimostrazione).
5. \mathbb{R} come spazio metrico. Valore assoluto e distanza. Disuguaglianza triangolare.
6. Successioni in \mathbb{R} . Limiti di successioni. Esempio: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$.
7. Convergenza delle successioni monotone limitate. (Con dimostrazione). (Altra forma della proprietà di completezza). Definizione del numero e di Napier.
8. Proprietà di Archimede. (Non esistono 'numeri infinitesimi'). (Con dimostrazione).
9. \mathbb{Q} è denso in \mathbb{R} . Due formulazioni.
10. Teoremi sugli intervalli compatti inscatolati (con dimostrazione).(Quarta forma della completezza). (Con dimostrazione).
11. Rappresentazione dei numeri reali in base 2 e in base 10.
12. Numeri complessi. Operazioni di somma e prodotto. Interpretazione geometrica del prodotto per un numero complesso. Radici n -esime di un numero complesso.

Seconda settimana

13. Esistenza di infiniti numeri primi. (Con la dimostrazione di Euclide, Elementi, Proposizione IX.20).

14. Funzioni iniettive. Immagine di una funzione; funzioni suriettive. Funzioni biunivoche (o invertibili).
15. Definizione: Due insiemi X e Y hanno la stessa cardinalità o sono equipotenti se esiste una funzione invertibile $X \rightarrow Y$.
16. L'insieme dei naturali \mathbb{N} e il sottoinsieme proprio $\mathcal{P} \subset \mathbb{N}$ dei numeri quadrati perfetti hanno la stessa cardinalità (Esempio di Galileo).
17. Definizione di insieme numerabile. L'insieme \mathbb{Q} dei razionali è numerabile. (Con dimostrazione).
18. L'insieme \mathbb{R} dei reali non è numerabile. (Procedimento diagonale di Cantor). (Con dimostrazione).
19. Definizione di funzioni continue. Primi esempi: le funzioni costanti, la funzione identità, cos e sin sono continue.
20. Teorema di Permanenza del Segno per le successioni. (Con dimostrazione).
21. Successioni e funzioni continue. Teorema: Siano $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione continua, $\alpha \in D$ e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione in D che converge al punto α . Allora la successione $f(x_n)$ converge a $f(\alpha)$. In breve:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n\right)$$

(Con dimostrazione).

22. Definizione di intervallo di \mathbb{R} .
23. Teorema degli Zeri per le funzioni continue (con dimostrazione).
Esercizio: Ogni polinomio a coefficienti reali di grado dispari ha almeno una radice reale.

Terza settimana

24. Funzioni strettamente monotone.
25. Teorema sulla continuità della funzione inversa di una funzione continua su un intervallo. (Senza dimostrazione).
26. Esempi di funzioni continue su intervalli e loro inverse: elevamento a potenza e radici n -esime, sin e arcsin, cos e arccos, tan e arctan, \exp_a e \log_a .
27. Definizione della funzione esponenziale \exp_a , $a > 0$, come l'unica funzione continua $\mathbb{R} \xrightarrow{f_a} \mathbb{R}_{>0}$ che soddisfa

$$f_a(x_1 + x_2) = f_a(x_1)f_a(x_2)$$

(ossia, è un omomorfismo di gruppi) e $f_a(1) = a$. Se $a \neq 1$, f_a è invertibile, strettamente crescente se $a > 1$, strettamente decrescente se $0 < a < 1$. La sua inversa (per $a \neq 1$) si chiama \log_a , e soddisfa

$$\log_a(y_1 y_2) = \log_a(y_1) + (\log_a(y_2))$$

per ogni $y_1, y_2 > 0$. (Costruzione di f_a per gli esponenti razionali. Cenno al fatto che la continuità di f_a permette una estensione unica a tutto \mathbb{R}).

28. Confronto di infinitesimi e di infiniti. Significato di $f(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$. Equivalenza asintotica $f(x) \sim g(x)$ per $x \rightarrow x_0$.
29. Esempi geometrici di rapporti tra infinitesimi: rapporto tra la lunghezza dell'arco di circonferenza e la lunghezza della corda sottesa, quando l'angolo al centro tende a zero ($\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, x in radianti); rapporto tra la saetta (distanza tra punto medio dell'arco di circonferenza e punto medio della corda) e la lunghezza dell'arco ($\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$, x in radianti).

Quarta settimana

30. Teorema (di Weierstrass) *Ogni funzione continua su un intervallo compatto è limitata. Inoltre, assume il valore massimo e il valore minimo.*
31. Definizione di derivata come limite del rapporto incrementale.
32. Definizione di funzione differenziabile. Differenziale in un punto.
33. Per una funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, si ha: f derivabile se, e solo se, f è differenziabile.
34. Teorema: *Se una funzione è derivabile, è continua.*
35. Regole di derivazione: derivata della somma, del prodotto, del quoziente, della funzione composta, della funzione inversa.
36. Teorema di Fermat. Teorema di Rolle. Teorema di Lagrange (o del Valor Medio). Prime conseguenze del teorema di Lagrange: una funzione derivabile su un intervallo con derivata nulla è costante; due funzione derivabili su un intervallo con derivate uguali differiscono per una costante.
37. Relazioni tra segno della derivata e monotonia. Applicazioni allo studio dei massimi e dei minimi.

Quinta settimana

38. Teorema di Cauchy.
39. Teorema di de L'Hospital. Esempi.
40. Formula di Taylor con il resto di Peano (Studio locale).
41. Calcoli di limiti con la Formula di Taylor.
42. Calolo di limiti: uso del simbolo \sim di equivalenza asintotica, della Formula di Taylor, della Regola di de L'Hospital.
43. Formula di Taylor con il resto di Lagrange (Studio globale). (Senza dimostrazione). Applicazione: stima dell'errore.
44. Confronto tra la Formula di Taylor con il resto di Peano e quella con il resto di Lagrange.

45. Cenni allo sviluppo di e^x , $\sin x$, $\cos x$ eccetera in serie di potenze.

Sesta settimana

46. Esercizi di ripasso di calcolo sul calcolo differenziale e i numeri complessi.
47. Test della derivata prima e seconda per stabilire su un punto è di minimo o massimo relativo per un funzione.
48. Espressione generale di una isometria del piano complesso: $F(z) = uz + w$, oppure: $F(z) = u\bar{z} + w$, con $|u| = 1$.
49. Isometrie che preservano, o non preservano, l'orientazione.
50. Punti fissi di una isometria del piano; esame dei casi possibili.

Settima settimana (28-31 Ottobre 2019)

51. Esercizi e complementi: polinomi di Taylor, limiti con Taylor, grafici qualitativo locali (in un intorno di un punto), operazioni sui numeri complessi, potenze di un numero complesso con la Formula di De Moivre.
52. Ripasso sulle isometrie del piano euclideo. Esercizio: La composizione di due isometrie è una isometria. Riflessioni in una retta.
53. Composizione di due o di tre riflessioni in rette nel piano euclideo. Definizione di rotazione e di traslazione, riflessione, glisso-riflessione.
54. Teorema delle Tre Riflessioni (solo enunciato): Ogni isometria del piano euclideo si può ottenere come composizione di al più tre riflessioni in rette.

5/11/2019: Prima Prova Parziale.

Ottava settimana (11-15 Novembre 2019)

55. Integrale inferiore e superiore. Funzioni integrabili secondo Riemann. Integrale definito come limite di somme di Riemann.
56. Proprietà dell'integrale: linearità, monotonia eccetera.
57. Teorema della Media Integrale. (Con dimostrazione.)
58. Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale e Formula di Newton-Leibniz. (Con dimostrazione.)
59. Integrali generalizzati.

60. Tecniche di integrazione: integrazione per parti e per sostituzione.

Nona settimana (18-22 Novembre 2019)

61. Equazioni separabili.

62. Problema di Cauchy. Soluzioni massimali. Esempi.

Decima settimana (25-29 Novembre 2019)

63. Equazioni lineari del primo ordine.

64. Espressione della soluzione generale.

65. Spazio vettoriale delle soluzioni dell'equazione omogenea. Spazio affine delle soluzioni dell'equazione non omogenea.

66. Introduzione allo spazio ordinario della fisica classica. Spazi vettoriali. Spazi affini.

67. Prodotto scalare. Proprietà: il prodotto scalare è bilineare, simmetrico, positivo.

68. Applicazioni del prodotto scalare alla dimostrazione di teoremi di geometria (teorema di Pitagora, di Carnot, di Varignon eccetera).

69. Proiezione di un vettore lungo (la retta di) un altro vettore.

Undicesima settimana (2-6 Dicembre 2019)

70. Basi ortonormali. Sistema di riferimento cartesiano ortogonale. Coordinate cartesiane. Espressione del prodotto scalare in coordinate cartesiane.

71. Area di un parallelogramma generato da due vettori del piano. Determinanti di una matrice 2×2 . Cenno ai bivettori (non in programma). Definizione di prodotto vettoriale. Componenti cartesiane del prodotto vettoriale.

72. Equazione cartesiana di un piano nello spazio. Equazioni parametriche di un piano nello spazio.

73. Equazioni cartesiane di una retta nello spazio. Equazione parametrica di una retta nello spazio.

74. Parallelismo e ortogonalità (tra rette, tra piani, tra rette e piani).

- 75. Distanza di un punto da un piano.
- 76. Fascio di piani.
- 77. Esercizi su rette e piani.

Dodicesima settimana (9-13 Dicembre 2019)

- 78. Curve parametrizzate nello spazio. Parametro lunghezza d'arco.
- 79. Tre definizioni equivalenti di curvatura: inverso del raggio del cerchio osculatore; $|\mathbf{T}'(s)|$ (s : lunghezza d'arco); limite di $\Delta\vartheta/\Delta s$ per $\Delta s \rightarrow 0$. Dimostrazione di: $|\mathbf{T}'(s)| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \Delta\vartheta/\Delta s$.
- 80. Riferimento di Frenet: $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$.
- 81. Piani individuati da $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$: osculatore, normale, rettificante.
- 82. Formula della curvatura (rispetto a un parametro arbitrario).
- 83. Decomposizione dell'accelerazione.
- 84. Definizione di torsione.
- 85. Esercizi sulle curve parametrizzate nello spazio.

Tredicesima settimana (16 - 20 Dicembre 2019)

- 86. Ripetizione e sintesi su tutti gli argomenti in programma. Esercizi di ripasso.