Serie numeriche

Vogliamo dare significato a una "somma infinita." Esempi:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots \tag{1}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots \tag{2}$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots \tag{3}$$

Data la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n + \ldots\ldots \tag{4}$$

consideriamo la successione delle somme parziali

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

Serie convergenti, divergenti, indeterminate

Definizione

Data la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, *poniamo:* $S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$

- *Si dice che la serie è convergente se la successione* S_n *converge a un numero (finito)* S. *Si scrive*

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

- *Si dice che la serie è divergente a* $+\infty$ *(o a* $-\infty$*) se la successione* S_n *diverge a* $+\infty$ *(o a* $-\infty$*).*
- *Se infine la successione delle somme parziali* S_n *non converge e non diverge, si dice anche che la serie indeterminata.* □

La serie geometrica

Teorema

Carattere della serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + ... + q^n + ... \tag{5}$$

1. *Se* $|q| < 1$ *converge a* $\dfrac{1}{1-q}$.
2. *Se* $q \geq 1$ *diverge a* $+\infty$.
3. *Se* $q \leq -1$ *indeterminata.*

Dimostrazione (Serie geometrica)

La somma parziale S_n è data da:

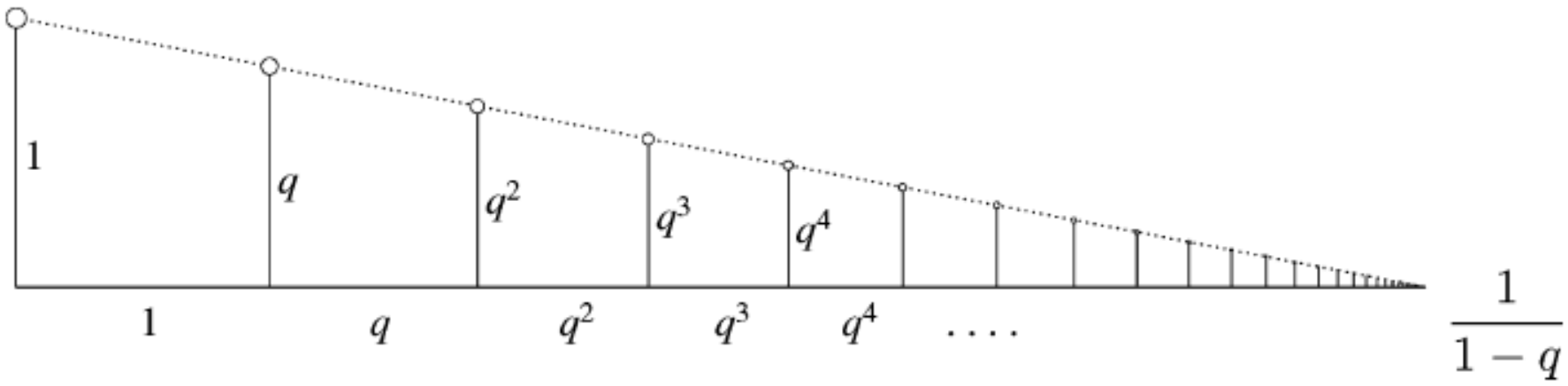
$$S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + ... + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

1. Se $|q| < 1$, la successione q^n tende a zero. Quindi

$$\lim S_n = \lim \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}$$

2. Se $q \geq 1$, ovvio che la successione S_n tende a $+\infty$.
3. Se $q \leq -1$, il termine q^{n+1} tende a $+\infty$ in valore assoluto, ma ha alternativamente segno positivo e negativo. Quindi la successione S_n non ha limite (oscilla). $\square$

Serie geometrica: una interpretazione geometrica



Esempio: i numeri come somme di serie

La successione

$$\begin{array}{lcll} 0,3 & = & & = & 3/10 \\ 0,33 & = & 0,3+0,03 & = & 3/10+3/100 \\ 0,333 & = & 0,3+0,03+0,003 & = & 3/10+3/100+3/1000 \\ \ldots. & & \ldots. & \ldots. & \ldots. \end{array}$$

tende a $0,\overline{3} = 0,333333.....$:

$$\begin{aligned} 0,\overline{3} &= \frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\cdots+\cdots \\ &= \frac{3}{10}\left(1+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{10^n}+\cdots\right) \\ &= \frac{3}{10}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{10^n} \\ &= \frac{3}{10}\left[\frac{1}{1-1/10}\right]=\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Serie armoniche generalizzate

Teorema (Serie armoniche generalizzate)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a} \quad \begin{cases} \textit{converge} & \textit{se } a > 1 \\ \textit{diverge a } +\infty & \textit{se } a \leq 1 \end{cases}$$

Daremo una dimostrazione più avanti, usando il calcolo integrale.

Condizione necessaria per la convergenza

Teorema (Condizione necessaria per la convergenza)

Se una serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *converge, allora* $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Supponiamo che la serie converga: $\lim_{k\to+\infty} S_k = L$

Il termine n-esimo della serie è dato da

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} a_n &= \lim_{n\to+\infty}(S_n - S_{n-1}) \\
&= \lim_{n\to+\infty} S_n - \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} \\
&= L - L = 0 \qquad \square
\end{aligned}$$

La condizione non è sufficiente

Controesempio

La serie armonica divergente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = +\infty$$

mostra che

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0 \qquad \text{non implica} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \ \text{ convergente.}$$