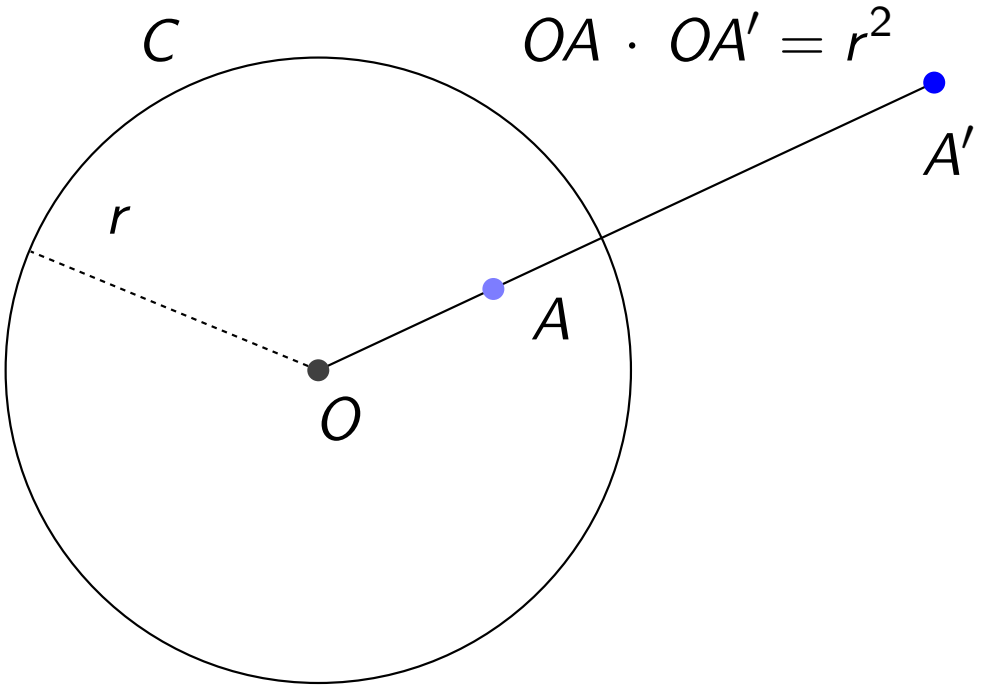
Introduzione alla teoria delle inversioni in cerchi

Bibliografia

- Brannan D., Esplen M., Gray J., *Geometry*, Cambridge University Press, (2012).
- Blair D., *Inversion Theory and Conformal Mappings*, American Mathematical Society, (2000).

Inversione rispetto a un cerchio



Definizione (Inversione in un cerchio)

La inversione rispetto al cerchio C di centro O e raggio r manda A (diverso da O) nel punto A' che sta sulla semiretta OA e soddisfa

$$OA \cdot OA' = r^2 \tag{1}$$

Inversione rispetto a S^1

Esercizio ($t = t^{-1}$, ossia: $t^2 =$ Identità)

L'inversione è una trasformazione involutoria: $t^2 = Id$.

Esercizio

L'inversione rispetto al cerchio unitario $S^1 = \{u \in \mathbb{C} | \, |u| = 1\}$

$$\mathbb{C} \setminus 0 \xrightarrow{t} \mathbb{C} \setminus 0$$

manda $z(\neq 0)$ in $t(z) = \dfrac{1}{\overline{z}}$.
Se $z = x + iy(\neq 0)$, l'inversione t è la trasformazione:

$$(x, y) \longmapsto \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

Relazione tra le coordinate (x, y) e (x', y') di punti corrispondenti nell'inversione t rispetto a S^1

Esercizio

$A = (x, y)(\neq (0, 0))$ e $t(A) = A' = (x', y')$. Esprimere (x, y) in funzione di (x', y').

Soluzione

Si è visto che:

$$(x', y') = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

Poiché l'inversione t è involutoria ($t = t^{-1}$), si ha, per simmetria:

$$(x, y) = \left(\frac{x'}{x'^2 + y'^2}, \frac{y'}{x'^2 + y'^2} \right)$$

Esercizio

Determinare l'immagine della retta $2x + 4y - 1 = 0$ *rispetto alla inversione* t *in* S^1.

Soluzione

Il legame tra $A = (x, y)$ e $A' = t(A) = (x', y')$ è

$$(x, y) = \left(\frac{x'}{x'^2 + y'^2}, \frac{y'}{x'^2 + y'^2} \right)$$

Poiché x e y soddisfano $2x + 4y - 1 = 0$, x' e y' soddisfano:

$$2\frac{x'}{x'^2 + y'^2} + 4\frac{y'}{x'^2 + y'^2} - 1 = 0$$

$$(x' - 1)^2 + (y' - 2)^2 = 5$$

Si tratta di una circonferenza (bucata) passante per l'origine.

Proprietà dell'inversione

Teorema

In una inversione rispetto a un cerchio di centro O:

1. *Una retta che non passa per l'origine è trasformata in una circonferenza bucata in O;*
2. *Una retta passante per O (bucata in O) è trasformata in se stessa (non puntualmente);*
3. *Una circonferenza bucata in O si trasforma in una retta (che non passa per O);*
4. *Una circonferenza che non passa per O si trasforma in una circonferenza che non passa per O.*

Teorema (Le inversioni sono trasformazioni conformi)

Una inversione in un qualunque cerchio preserva le ampiezze degli angoli (ma inverte la loro orientazione).