Esercizi di ripasso

18 e 21 Dicembre 2018

Esercizio

Nello spazio affine euclideo $\mathbb{R}^3$, si considerino le due rette

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 2t \end{cases} \tag{1}$$

e

$$s : \begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Scrivere un'equazione cartesiana di un piano (se esiste) che includa s e sia parallelo a r. Quanti piani di questo tipo esistono?

Esercizio

Calcolare la minima e la massima curvatura dell'ellisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad a > b > 0$$

Esercizio

Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_C \sqrt{\left(\frac{bx}{a}\right)^2 + \left(\frac{ay}{b}\right)^2}\, ds \tag{3}$$

dove C è l'ellisse di equazione cartesiana $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Parametrizzazione: $x = a\cos t, \quad y = b\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$.
$ds = \left(\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\right)\, dt$. L'integrale (3) è uguale a:

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{ba\cos t}{a}\right)^2 + \left(\frac{ab\sin t}{b}\right)^2}\, \left(\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\right)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)\, dt = a^2\int_0^{2\pi} \sin^2 t\, dt + b^2\int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt$$

$$= (a^2 + b^2)\pi$$

Esercizio

Studiare la convergenza dell'integrale

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+x^2}}\,dx \tag{4}$$

Soluzione

Poiché $0 < \dfrac{1}{\sqrt{x+x^2}} < \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, l'integrale (4) converge per il criterio del confronto. Oppure: $\dfrac{1}{\sqrt{x+x^2}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, per $x \to 0^+$, e quindi l'integrale (4) converge per il criterio del confronto asintotico.

Esercizio

1) Studiare la convergenza dell'integrale

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx \tag{5}$$

Calcolare il valore numerico dell'integrale (5).

Soluzione

1) Converge, perché (ad esempio) $xe^{-x} < 1/x^2$ (per x grande).

2) Integrando per parti: $\displaystyle\int xe^{-x}\,dx = -e^{-x}(x+1) + C$. Quindi

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b xe^{-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\left[-e^{-x}(x+1)\right]_0^b = 1$$

Esercizio

Dire se sono convergenti i seguenti integrali:

1. $\displaystyle\int_2^{+\infty} x^2 \sin \frac{1}{x^2}\, dx$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}\, dx$

Risposte

1) Non converge, perché $x^2 \sin \dfrac{1}{x^2} \to 1$, per $x \to +\infty$.

2) Per $x \in (1, +\infty)$,

$$\left| \frac{\sin x}{\sqrt{x^3}} \right| \leq \frac{1}{x^{3/2}}$$

Poiché $\dfrac{1}{x^{3/2}}$ è integrabile su $(1, +\infty)$, anche l'integrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}\, dx$ converge, per il criterio del confronto.

Esercizio

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' - 2x = 7e^{2t} \\ x(0) = 3 \end{cases}$$

RISPOSTE.

Soluzione generale: $Ce^{2t} + e^{2t} \int e^{-2t} 7e^{2t}\, dt = Ce^{2t} + 7te^{2t}$

Soluzione del problema di Cauchy: $e^{2t}(3 + 7t)$

Esercizio

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + 4y = x + 2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

RISPOSTE.

Soluzione generale: $c_1 e^{-4x} + \frac{x}{4} + \frac{7}{16}$

Soluzione del problema di Cauchy: $-\frac{7}{16} e^{-4x} + \frac{x}{4} + \frac{7}{16}$

Esercizio

a) Trovare la curvatura (in valore assoluto) della parabola $y = x^2$ in un punto qualunque (x, y) del suo grafico.
b) Scrivere l'equazione del cerchio osculatore nell'origine.

RISPOSTE.
a) Curvatura $K(x)$ nel punto (x, x^2) del grafico:

$$K(x) = \frac{y''(x)}{[1 + (y'(x))^2]^{3/2}} = \frac{2}{[1 + 4x^2]^{3/2}}$$

In $x = 0$ la curvatura è $K(0) = 2$.
b) Nell'origine la curvatura è $K(0) = 2$ e il raggio di curvatura è $R(0) = 1/K(0) = 1/2$.
Il (bordo del) cerchio osculatore nell'origine ha equazione:

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$