Esercizi di ripasso

17 Dicembre 2018

Esercizio

1. *Trovare l'integrale generale dell'equazione:*

$$y' + \frac{1}{x+1}y = 0, \qquad x \in (-1, +\infty) \tag{1}$$

2. *Verificare, facendo i conti, che la risposta data è corretta.*

Risposte

Si può vedere come equazioni a variabili separabili, oppure come equazione lineare del primo ordine, omogenea.

1) Integrale generale: $y(x) = C\dfrac{1}{x+1}, \quad C \in \mathbb{R}$.

2) Verifica della correttezza della risposta. Sostituiamo $y = C\dfrac{1}{x+1}$, $(C \in \mathbb{R})$, al posto di y in (1). Otteniamo:

$$y' + \frac{1}{x+1}y = -C\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1}C\frac{1}{x+1} = 0.$$

Esercizio

1. *Trovare l'integrale generale dell'equazione:*

$$y' + \frac{1}{x+1}y = 4, \qquad x \in (-1, +\infty) \tag{2}$$

2. *Trovare la soluzione del problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y' + \dfrac{1}{x+1}y = 4 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

definita sull'intervallo $I = (-1, +\infty)$.

Risposte

1) $\dfrac{C}{1+x} + \dfrac{4(x+x^2/2)}{1+x}$, $\quad C \in \mathbb{R}$

2) $\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{4(x+x^2/2)}{1+x}$

Esercizio

- *Risolvere il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' - y = x + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

- *Facendo i conti, controllare che la risposta data sia giusta.*

RISPOSTA. $\qquad y(x) = 3e^x - 2 - x, \qquad x \in \mathbb{R}.$

Esercizio

Trovare il polinomio di Taylor-Maclaurin di ordine due in $x_0 = 0$ (e il grafico qualitativo vicino a zero) della soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' - y = x + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

senza trovare prima esplicitamente tale soluzione.

SOLUZIONE. Per la condizione iniziale abbiamo: $y(0) = 1$.
Da $y' - y = x + 1$ segue: $y'(0) = y(0) + 0 + 1 = 2$.
Da $y' - y = x + 1$ segue: $y'' = y' + 1$, e quindi
$y''(0) = y'(0) + 1 = 2 + 1 = 3$.
Quindi il polinomio di Taylor-Maclaurin di ordine due in zero è

$$1 + 2x + \frac{3}{2}x^2$$

Esercizio

Calcolare l'integrale (non-orientato, curvilineo di prima specie, o di densità)

$$\int_C \left(x^2+y^2\right) z\, ds$$

dove la curva C è parametrizzata da $C(t) = (\sin 3t, \cos 3t, 4t)$, $0 \le t \le \pi$. (Massa di un'elica di densità di massa $\left(x^2+y^2\right) z\, ds$).

Risposta.

$$\int_C \left(x^2+y^2\right) z\, ds = \int_0^\pi \left(\sin^2 3t + \cos^2 3t\right) 4t \sqrt{(3\cos 3t)^2 + (-3\sin 3t)^2 + 16}\, dt$$

$$= 4\int_0^\pi t\sqrt{9\left(\cos^2 3t + \sin^2 3t\right) + 16}\, dt$$

$$= 20\int_0^\pi t dt = 10\pi^2.$$

Esercizio

Sia C la cubica gobba (twisted cubic)

$$\mathbb{R} \xrightarrow{C} \mathbb{R}^3, \qquad C(t) = (t, t^2, t^3)$$

1. *Calcolare $C'(t)$, $C''(t)$, $C'(t) \times C''(t)$. Dimostrare che la curva C è biregolare (cioè, C' e C'' non sono mai paralleli).*
2. *Trovare la terna fondamentale $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ in $t = 0$.*
3. *Calcolare la curvatura $\kappa(0)$ in $t = 0$.*
4. *Calcolare la curvatura $\kappa(t)$ in $t \in \mathbb{R}$.*
5. *Trovare le equazioni dei piani $(\mathbf{T}, \mathbf{N})$, $(\mathbf{N}, \mathbf{B})$, $(\mathbf{B}, \mathbf{T})$ in $t = 1$.*

Calcoli per la cubica gobba $C(t) = (t, t^2, t^3)$. (Parte 1)

1) $C'(t) = (1, 2t, 3t^2)$, $C''(t) = (0, 2, 6t)$, $C' \times C'' = (6t^2, -6t, 2)$.

$C'(t) \times C''(t) \neq 0$. Quindi C è biregolare.

2) $\mathbf{T}(0) = C'(0)/|C'(0)| = (1, 0, 0)$, $\qquad C''(0) = (0, 2, 0)$.
Siccome $C''(0) \perp C'(0)$, si ha: $\mathbf{N}(0) = C''(0)/|C''(0)| = (0, 1, 0)$.
Quindi $\mathbf{B}(0) = \mathbf{T}(0) \times \mathbf{N}(0) = (0, 0, 1)$.

Metodo generale (da seguire quando C'' non è ortogonale a C'):
Prima: $\mathbf{B}(0) = \dfrac{C'(0) \times C''(0)}{|C'(0) \times C''(0)|} = (0, 0, 1)$;
Poi: $\mathbf{N}(0) = \mathbf{B}(0) \times \mathbf{T}(0)$.

3) $\kappa(0) = \dfrac{|C'(0) \times C''(0)|}{|C'(0)|^3} = \dfrac{|(1, 0, 0) \times (0, 2, 0)|}{|(1, 0, 0)|} = 2$

4) $\kappa(t) = \dfrac{|C' \times C''|}{|C'|^3} = \dfrac{2\sqrt{9t^4 + 9t^2 + 1}}{(1 + 4t^2 + 9t^4)^{3/2}}$

Calcoli per la cubica gobba $C(t) = (t, t^2, t^3)$. (Parte 2)

5) Attenzione. I vettori $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$ si intendono ora in $t = 1$.

Per trovare i tre piani $(\mathbf{T}, \mathbf{N})$, $(\mathbf{N}, \mathbf{B})$, $(\mathbf{B}, \mathbf{T})$ in $C(1) = (1, 1, 1)$, troviamo tre vettori paralleli rispettivamente a $\mathbf{B}$, $\mathbf{T}$ e $\mathbf{N}$.

a) $(\mathbf{N}, \mathbf{B})$. Un vettore parallelo a $\mathbf{T}$ è $C'(1) = (1, 2, 3)$. Quindi:
Piano normale $(\mathbf{N}, \mathbf{B})$: $1(x-1) + 2(y-1) + 3(z-1) = 0$

b) $(\mathbf{T}, \mathbf{N})$. Un vettore parallelo a $\mathbf{B}$ è
$C'(1) \times C''(1) = (1, 2, 3) \times (0, 2, 6) = (6, -6, 2)$. Quindi:
Piano osculatore $(\mathbf{T}, \mathbf{N})$: $3(x-1) - 3(y-1) + 1(z-1) = 0$

c) $(\mathbf{B}, \mathbf{T})$. Un vettore parallelo a $\mathbf{N}$ è $\alpha\mathbf{B} \times \beta\mathbf{T}$ $(\alpha, \beta \neq 0)$, ad esempio $(3, -3, 1) \times (1, 2, 3) = (-11, 8, 9)$.
Piano rettificante $(\mathbf{B}, \mathbf{T})$: $-11(x-1) - 8(y-1) + 9(z-1) = 0$.

Esercizio

Sia C la cubica gobba

$$\mathbb{R} \xrightarrow{C} \mathbb{R}^3, \qquad C(t) = (t, t^2, t^3)$$

1. *Dimostrare che C non è piana.*
2. *Disegnare le proiezioni ortogonali di C sui piani coordinati (x, y), (y, z), (x, z).*
3. *(Difficile, non richiesto) Disegnare, approssimativamente, la curva C (cioè, disegnare la sua immagine).*