Un esempio: studio dell'elica cilindrica

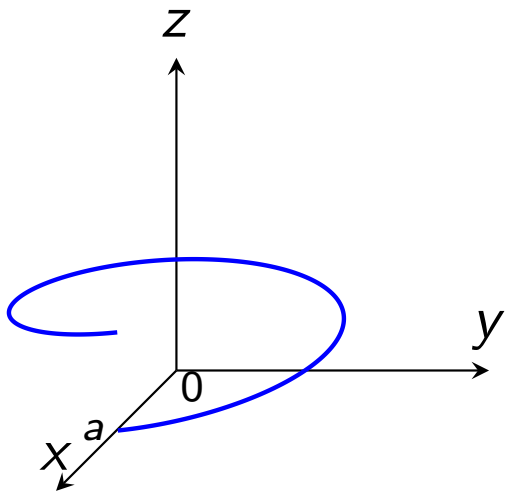
13 Dicembre 2018

Parametrizzazione. Vettore tangente unitario .

Una parametrizzazione dell'elica cilindrica è:

$[0, 2\pi] \xrightarrow{C} \mathbb{R}^3$,

$t \longmapsto C(t) = (a\cos t, a\sin t, bt), \qquad (a, b > 0)$



Vettore velocità (tangente) in t: $\qquad C'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$

Velocità scalare in t: $\qquad |C'(t)| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Vettore tangente unitario $\mathbf{T}$ in t:

$$\mathbf{T}(t) = \frac{C'(t)}{|C'(t)|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(-a\sin t, a\cos t, b)$$

Parametro lunghezza d'arco

Parametro lunghezza d'arco, a partire da $t_0 = 0$:

$$s(t) = \int_0^t |C'(\tau)|\, d\tau = \int_0^t \sqrt{a^2+b^2}\, d\tau = \sqrt{a^2+b^2}\, t$$

Dunque: $s = s(t) = \sqrt{a^2+b^2}\, t, \qquad t = t(s) = \dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Parametrizzazione alla lunghezza d'arco:

$$C(t(s)) = C(s) = (a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}})$$

Curvatura (usando il parametro lunghezza d'arco)

$$C(s) = (a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}})$$

$$\mathbf{T}(s) = \frac{d}{ds}C(s) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, b)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{T}'(s) &= \frac{d}{ds}\mathbf{T}(s) = \frac{a}{a^2+b^2}(-\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0)\\ &= \frac{a}{a^2+b^2}\mathbf{N}(s)\end{aligned}$$

dove si è definito $\mathbf{N}(s) = (-\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0))$

Quindi, per definizione, la curvatura è $\kappa(s) = \frac{a}{a^2+b^2}$.

Vettore accelerazione $\mathbf{a} = C''$

Vettore accelerazione in t:
$\mathbf{a}(t) = C''(t) = \dfrac{d}{dt}C'(t) = (-a\cos t, -a\sin t, 0)$

Si noti che i vettori $\mathbf{v}(t)(= C'(t))$ e $\mathbf{a}(t)(= C''(t))$

$$\mathbf{v}(t) = (-a\sin t, a\cos t, b), \quad \mathbf{a}(t) = (-a\cos t, -a\sin t, 0)$$

sono linearmente indipendenti (ossia, non sono paralleli), cioè la curva C è biregolare. Dunque esiste in ogni t il piano osculatore. Attenzione: In questo caso particolare (elica), $C'(t)$ e $C''(t)$ sono ortogonali. Ma, in generale, il vettore velocità e il vettore accelerazione non sono ortogonali.

Curvatura (usando un parametro arbitrario)

Usiamo la formula:

$$\kappa(t) = \frac{|C'(t) \times C''(t)|}{|C'(t)|^3} = \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}{|\mathbf{v}|^3} \tag{1}$$

$C'(t) \times C''(t) = (ab \sin t, -ab \cos t, a^2)$,

$|C'(t) \times C''(t)| = a\sqrt{a^2 + b^2}$

$$\kappa(t) = \frac{|C'(t) \times C''(t)|}{|C'(t)|^3} = \frac{a\sqrt{a^2 + b^2}}{\left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^3} = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

Equazione cartesiana del piano osculatore. (Esempio).

Consideriamo un esempio specifico ($a = b = 1$):
$C(t) = (\cos t, \sin t, t)$;

$t_0 = \pi$. $\qquad P_0 = C(t_0) = C(\pi) = (-1, 0, \pi)$.

$C'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$; $\qquad C'(\pi) = (0, -1, 1)$

$C''(t) = (-\cos t, -\sin t, 0)$; $\qquad C''(\pi) = (-1, 0, 0)$

Un vettore ortogonale al piano osculatore in P_0:
$C'(\pi) \times C''(\pi) = (0, -1, -1)$

Piano osculatore in $t = \pi$ (in $C(\pi) = (-1, 0, \pi)$):
$0(x+1) - 1(y-0) - 1(z-\pi) = 0$, $\quad$ cioè $\; -y - z + \pi = 0$

Centro del cerchio osculatore

Il vettore posizione $\overrightarrow{OC}$ del centro C del cerchio osculatore nel punto $P = \underline{\alpha}(t_0)$ è dato da:

$$\overrightarrow{OC} = \underline{\alpha}(t_0) + \frac{1}{k}\mathbf{N}(t_0)$$

Esempio

Trovare il centro C del cerchio osculatore all'elica $\underline{\alpha}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ in $P = (-1, 0, \pi)$.

P corrisponde al valore $t_0 = \pi$: $\quad P = \underline{\alpha}(\pi)$.
La curvatura (costante) è $k = \dfrac{a}{a^2 + b^2} = \dfrac{1}{2}$. Il vettore normale $(-\cos t, -\sin t, 0)$ in $t_0 = \pi$ è $\mathbf{N}(\pi) = (-1, 0, \pi)$.
Dunque:

$$\overrightarrow{OC} = \underline{\alpha}(t_0) + \frac{1}{k}\mathbf{N}(t_0) = (-1, 0, \pi) + 2(-1, 0, 0) = (1, 0, \pi)$$

Terna fondamentale $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ in un punto $C(t_0)$. (Esempio).

Consideriamo ancora l'esempio:
$C(t) = (\cos t, \sin t, t)$;

$t = \pi. \qquad P_0 = C(\pi) = (-1, 0, \pi).$

$$\mathbf{T}(\pi) = \frac{(0,-1,1)}{|(0,-1,1)|} = (0, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$$

$$\mathbf{B}(\pi) = \frac{\mathbf{v}(\pi) \times \mathbf{a}(\pi)}{|\mathbf{v}(\pi) \times \mathbf{a}(\pi)|} = \frac{(0,-1,1) \times (-1,0,0)}{|(0,-1,1) \times (-1,0,0)|} = \frac{(0,-1,-1)}{\sqrt{2}}$$

$\mathbf{N}(\pi) = \mathbf{B}(\pi) \times \mathbf{T}(\pi) =$
$(0, -1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) \times (0, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = (-1, 0, 0)$

Piano normale, piano rettificante. (Esempio).

Esempio: $C(t) = (\cos t, \sin t, t)$;

$t = \pi$. $P_0 = C(\pi) = (-1, 0, \pi)$.

Piano normale in $t_0 = \pi$, cioè nel punto $C(\pi) = (-1, 0, \pi)$:
$\mathbf{v} \cdot (X - P_0) = 0$, ossia: $-y + z - \pi = 0$

Piano rettificante in $t_0 = \pi$: $\mathbf{N}(\pi) \cdot (X - P_0) = 0$, cioè
$(-1, 0, 0) \cdot (x + 1, y, z - \pi)$:

$$x + 1 = 0$$

Complementi: Torsione dell'elica.

Caso generale: $C(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$;
La torsione dell'elica

$$C(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$$

è costante, e uguale a:

$$\tau(t) = -\frac{(C'(t) \times C''(t)) \cdot C'''(t))}{\|C'(t) \times C''(t)\|^2} = -\frac{\det(C', C'', C''')}{\|C' \times C''\|^2} = \frac{-b}{a^2 + b^2}$$