Politecnico di Milano
Corso di Analisi e Geometria 1

Federico Lastaria
federico.lastaria@polimi.it

Un errore comune nell'uso dell'asintotico in una somma $+\infty - \infty$
23 Ottobre 2018

1 Un limite discusso a lezione.

Esercizio 1.1. *Calcolare il limite:*

$$\lim_{y\to 0^+}\left[\frac{e^y}{y} - \frac{1}{y}\frac{e^y-1}{y}\right] \tag{1.1}$$

Soluzione

Il limite è del tipo: $+\infty-\infty$. Conviene scrivere la differenza come un'unica frazione, e sviluppare il numeratore con Taylor. Ci si rende conto, facendo i conti, che basta arrestarsi al secondo ordine:

$$\begin{aligned}
\left[\frac{e^y}{y} - \frac{1}{y}\frac{e^y-1}{y}\right] &= \frac{ye^y - e^y + 1}{y^2} \\
&= \frac{y(1+y+y^2/2! + o(y^2)) - (1+y+y^2/2! + o(y^2)) + 1}{y^2} \\
&= \frac{y + y^2 + y^3/2! + o(x^3) - 1 - y - y^2/2! + o(y^2) + 1}{y^2} \\
&= \frac{y^2/2 + o(y^2)}{y^2} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{o(y^2)}{y^2} \qquad \text{per } \ y \to 0^+
\end{aligned}$$

Quindi il limite cercato è $\frac{1}{2}$ (perché $\frac{o(y^2)}{y^2} \to 0$ per definizione di o-piccolo).

Osservazione 1.2. Il limite (1.1) si scrive come $\lim_{y\to 0^+}[f(y) - g(y)]$, dove si è posto:

$$f(y) = \frac{e^y}{y} \qquad\qquad g(y) = \frac{1}{y}\frac{e^y-1}{y}$$

Notiamo che sia $f(y)$ sia $g(y)$ tendono a $+\infty$ per $y \to 0^+$.

Se al posto di $g(y)$ sostituissimo $g_1(y) = \frac{1}{y}$, che è asintotica a g per $y \to 0^+$, scriveremmo

$$\lim_{y\to 0^+}\left[\frac{e^y}{y} - g(y)\right] = \lim_{y\to 0^+}\left[\frac{e^y}{y} - \frac{1}{y}\right] = \lim_{y\to 0^+}\frac{e^y-1}{y} = 1 \qquad \textbf{(SBAGLIATO!)}$$

che è falso, perché sappiamo che il limite vale 1/2.

Se poi si sostituisse al posto di $f(y)$ la funzione $\frac{1}{y}$ $(\sim f(y))$ e, contemporaneamente, al posto di $g(y)$ la funzione $\frac{1}{y}$ $(\sim g(y))$ si otterrebbe un altro risultato

$$\lim_{y\to 0^+}[f(y)-g(y)] = \lim_{y\to 0^+}\left[\frac{1}{y}-\frac{1}{y}\right] = \lim_{y\to 0^+} 0 = 0 \qquad (\textbf{SBAGLIATO!})$$

che è ancora sbagliato. Riassumendo, abbiamo questo risultato:

Se, per $x \to x_0$, le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ tendono entrambe a $+\infty$ e vale l'equivalenza asintotica $g(x) \sim g_1(x)$ per $x \to x_0$, allora i due limiti

$$\lim_{y\to x_0}[f(y)-g(y)], \qquad \lim_{y\to x_0}[f(y)-g_1(y)] \tag{1.2}$$

(ammesso che esistano) sono in generale diversi tra loro.

In breve, in una forma di indecisione del tipo $+\infty-\infty$ non si può sostituire a un addendo un'altra funzione ad esso asintotica.

Osservazione 1.3. Cerchiamo di capire, più in profondità, *come mai*, nel caso di indeterminazione $+\infty-\infty$, non si possa sostituire a un addendo una funzione ad esso asintotica. Ricordiamo la definizione di equivalenza asintotica.

La relazione di equivalenza asintotica $g(y) \sim g_1(y)$, per $y \to y_0$, significa (se g_1 si mantiene non nulla in un intorno bucato di y_0)

$$\frac{g(y)}{g_1(y)} \to 1, \qquad \text{per } y \to y_0 \tag{1.3}$$

ossia, in modo equivalente,

$$\frac{g(y)}{g_1(y)} = 1 + o(1) \qquad \text{per } y \to y_0 \tag{1.4}$$

dove $o(1)$ denota una funzione infinitesima (cioè tendente a zero) per $y \to y_0$. Quest'ultima uguaglianza (moltiplicando ambo i membri per $g_1(y)$) equivale a sua volta a

$$g(y) = g_1(y)(1+o(1)) = g_1(y) + g_1(y)\cdot o(1) \qquad y \to y_0 \tag{1.5}$$

In definitiva:

$$\boxed{g \sim g_1, \ \text{ per } \ y \to y_0 \qquad \text{equivale a} \qquad g = g_1 + \underbrace{g_1\, o(1)}_{=o(g_1)} \quad \text{per } \ y \to y_0}$$

Dunque, la sostituzione corretta non è $\lim_{y\to x_0}[f(y)-g(y)] = \lim_{y\to x_0}[f(y)-g_1(y)]$ (che è sbagliata), ma

$$\lim_{y\to y_0}[f(y)-g(y)] = \lim_{y\to y_0}[f(y)-g_1(y)-g_1(y)\,o(1)] \tag{1.6}$$

Quindi, (nell'ipotesi che tutti i limiti in questione esistano),

$$\lim_{y \to y_0} [f(y) - g(y)] = \lim_{y \to y_0} [f(y) - g_1(y)] \; - \; \lim_{y \to y_0} [g_1(y)\, o(1)] \tag{1.7}$$

E *può accadere che il* $\lim_{y \to y^0} [g_1(y)\, o(1)]$ *non sia nullo*; questo è quello che accade nel nostro esempio:

$$\lim_{y \to 0^+} \left[\underbrace{\frac{e^y}{y}}_{f} - \underbrace{\frac{1}{y} \frac{e^y - 1}{y}}_{g} \right] \tag{1.8}$$

Se poniamo $g_1(y) = \frac{1}{y}$, vediamo subito che $g(y) \sim g_1(y) = \frac{1}{y}$, perché $\frac{e^y - 1}{y}$ tende a 1.

In questo caso, l'uguaglianza $g = g_1 + g_1 o(1)$ si scrive:

$$\underbrace{\frac{1}{y} \frac{e^y - 1}{y}}_{g} = \underbrace{\frac{1}{y}}_{g_1} + \underbrace{\frac{1}{y}}_{g_1} \underbrace{\left[\frac{e^y - 1 - y}{y} \right]}_{o(1)}$$

cioè, il nostro $o(1)$ è uguale a $\frac{e^y - 1 - y}{y}$. Allora, nel nostro caso,

$$\lim_{y \to 0^+} [g_1(y)\, o(1)] = \lim_{y \to 0^+} \frac{1}{y} \left[\frac{e^y - 1 - y}{y} \right] = \frac{1}{2}$$

Dunque:

Nel nostro caso, il termine $g_1(y)\, o(1)$ (che possiamo anche scrivere $o(g_1(y))$) non tende a zero, e quindi non è irrilevante al fine del calcolo del limite. Questo è il motivo per cui la semplice sostituzione di un addendo con uno asintotico ha portato a un risultato non corretto.

Procedendo nei nostri conti, abbiamo

$$\lim_{y \to 0^+} [f(y) - g_1(y)] = \lim_{y \to 0^+} \frac{e^y - 1}{y} = 1 \tag{1.9}$$

e

$$\lim_{y \to 0^+} [g_1(y)\, o(1)] = \lim_{y \to 0^+} \frac{1}{y} \left[\frac{e^y - 1 - y}{y} \right] = \frac{1}{2} \tag{1.10}$$

Dunque si avrà infine:

$$\lim_{y \to 0^+} [f(y) - g(y)] = \lim_{y \to 0^+} [f(y) - g_1(y)] - \lim_{y \to 0^+} [g_1(y)\, o(1)] = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \tag{1.11}$$

2 Un altro esempio

Esercizio 2.1. *Calcolare il limite:*

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \tag{2.1}$$

Soluzione Per $x \to 0$:

$$\frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{x - (x - x^3/3! + o(x^3))}{x^3} = \frac{x^3/3! + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3!} + \frac{o(x^3)}{x^3} \tag{2.2}$$

Dunque il limite è $\frac{1}{6}$.

L'equivalenza asintotica $\sin \sim x$, per $x \to 0$, è corretta, ma non autorizza a sostituire brutalmente $\sin x$ con x nella somma $x - \sin x$, perché in questo modo otterremmo, per $x \to 0$:

$$\frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{x - x}{x^3} = \frac{0}{x^3} \to 0 \qquad (\textbf{SBAGLIATO!}) \tag{2.3}$$

il che è sbagliato.